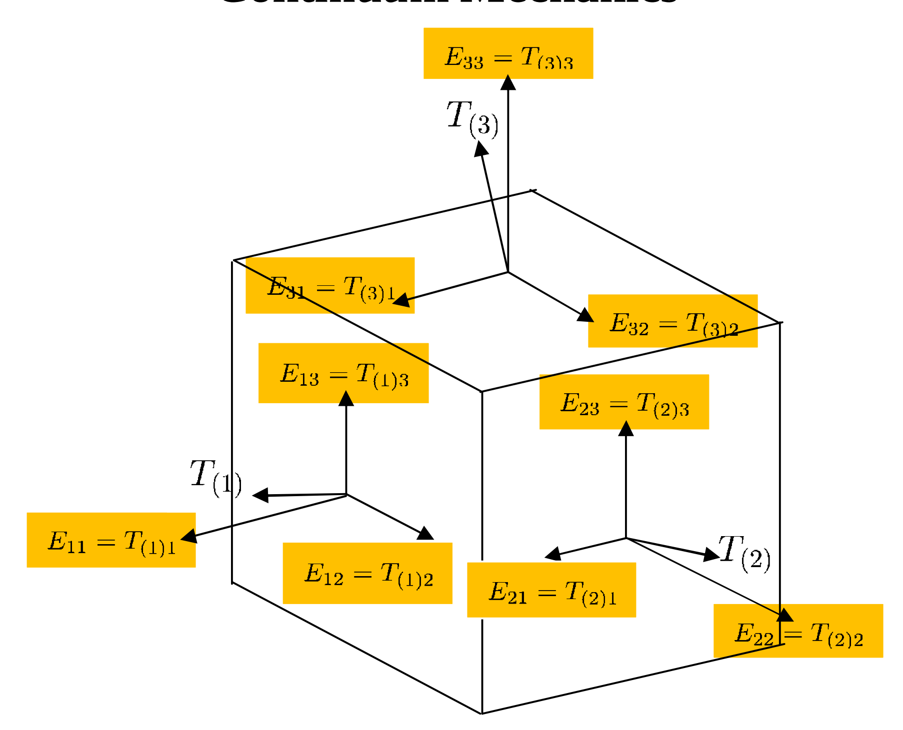
مدخل إلى حُسبان المُمتدات (المُوتِّرات)
وبعض تطبيقاتها في الهندسة التفاضُلية وعلم حركة المواد المُتصلة

Introduction to Tensor Calculus with Applications in Differential Geometry and Continuum Mechanics



المُعادلة (73.1) صفحة (174)، $E_{ij} = T_{(i)j}$ موضحة بالرسم

يحتوي على 153 مسألة محلُولة و106 مسألة غير محلُولة

جمع وإعداد وترجمة: فيصل أمين ياسين عبد المُحسن

إستهلال

إن المُمتد في الرياضيات — وفي بعض الدوائر الأكاديمية العربية تُستخدم كلمة المُوتِّر بدلاً عن المُمتد — هُو أحد الدِلالات الرِياضياتية بجانب الأعداد أو الكميات المُطلقة التي لا تتميز بوحدات القياس. يتميز المُمتد في خواصه بخواص الأعداد المُطلقة والمُتجهات والمُعاملات الخطِية. يُمكن للمُمتد أن يُكتب بدلالة الإحداثيات أو كمنظُومة أعداد مُطلقة لكنه يُعرف على أنه مُستقل عن أي نظام إحداثيات وعليه فإنه يُمكن تعريف المُمتد على أنه كميات أو مُركبات التي في أي نظام إحداثيات ترتبط بقانون تحويلات خطي مُميز خاص عند التغيير من نظام إحداثيات لآخر ونتيجة لذلك إنه إذا كان المُمتد يُساوي الصفر في نظام إحداثيات ما، فإنه يُساوي الصفر في أي نِظام إحداثيات آخر. للمُمتدات أهمية كبيرة في الفيزياء والهندسة التطبيقية. ففي مجال تصوير مُمتد الإنتشارية المعروف بإسم (Imaging Diffusion Tensor) يُعبر المُمتد عن النفاذية التفاضُلية العُضوية للماء ليُعطي مسحاً للدماغ.

هدف هذا الكتاب هُو إعطاء تعريف مُتماسك للنتائج الأساسية في حُسبان المُمتدات وأيضاً لإيضاح قُدرة تقنية المُمتدات بتطبيقاتهُ في الهندسة التفاضُلية وعِلم مُرونة الأجسام وعلم حركة الموائع والنظرية الخاصة والعامة للنسبية للفيزيائي أينشتاين.

يحتوي هذا الكتاب على ثمانية فصُول. في الخمسة فصُول الأُولى تم تقديم المفاهيم الرياضياتية للمُمتدات من غير إثباتات رياضياتية مُعقدة. والفصُول الثلاثة المُتبقية لا تعتمد على بعضها بعض ماعدا الأجزاء (§39) و (§40) بالفصل السادس الذي يشرح الهندسة التفاضُلية الإقليديسية في الفضاء الثُلاثي الأبعاد وهو ضروري لفهم الفصل الثامن الذي يحتوي على نظرية المُمتدات الديكارتية وعلم مُرونة الأجسام وعلم حركة الموائع. والفصل السابع يحتوي على النظرية الخاصة والعامة للنسبية لأينشتاين.

في هذا الكتاب تم أولاً دراسة المبادي الأساسية للعمليات الجبرية للمُمتدات وتم رُبطها بالمفاهيم القاعدة للهندسة الريمانية. وهذا تطلب دراسة رِمُوز كريستوفل والتفاضُل مُتحد التغايُر والمُنحنيات الأقصر طُولاً والتوازي ومُمتد ريمان كريستوفل. وبمُساعدة تقنيات المُمتدات تم مُناقشة الهندسة التفاضُلية الإقليديسية.

إن الفصلين السابع والثامن يحتويان على تطبيقات نظرية المُمتدات وهُما مُوجهان خِصيصاً للفيزياء النظرية. إن نظرية المُرونة تم دراستُها من المبادي الأولية.

ويعرض هذا الكتاب أيضاً النظرية الخاصة والعامة للنسبية والتي تحتوي على تحويلات لورنتز ومُعادلات ماكسويل للمجال الكهرمغنطيسي والكون المُتماثل كروياً و بُنية فضاء إشوارزشيلد وحركة الكواكب حول الشمس ومسارات أشعة الضوء في الكون من وجهة نظر أينشتاين ودي سيتر.

الإهداء

إلى الذين يُولُون أهمية وأولوية إلى العِلم والتعلِيم المُتميز فوق كُلِ شيئٍ آخر.

الشُكر

الشُكر للبروفسيور / الدكتور عُثمان محمد المكي — كُليةالعُلوم الرياضياتية، جامعة الخُرطوم — الذي إقترح تغيير إسم الكتاب من حُسبان المُمتدات وبعض تطبيقاتها في الهندسة التفاضُلية والفيزياء إلى مدخل إلى حُسبان المُمتدات وبعض تطبيقاتها في الهندسة التفاضُلية وعلم حركة المواد المُتصلة حيث تطلب ذلك من المؤلف إضافة عُدة إجزاء عن دراسة علم حركة الموائع كإضافة في الفصل الثامن وكتتممه ومُواصلة لدراسة علم مُرونة الأجسام المُتصلة وأيضاً فضل جعل النظرية الخاصة والعامة للنسبية الفصل السابع بدل الثامن.كماإقترح كلمة الإختزال بدل التقلُص.

المحتويات

الفصل الأول: حُسبان المُمتدات

الفصل الثاني: عُنصُر الخط

الفصل الثالث: التفاضُل مُتحد التغايُر

الفصل الرابع: المُنحنيات الأقصر طُولاً والتوازي

الفصل الخامس: مُمتد الإنحناء

الفصل السادس: الهندسة التفاضُلية في فضاء إقليدسي ثُلاثي الأبعاد

الفصل السابع: النظرية الخاصة والعامة للنسبية

الفصل الثامن: المُمتدات الدِيكارتية المُرونة وعلم حركة الموائع

الفصل الأول: حُسبان المُمتدات

1§. مقدمة

إن مفهوم المُمتد جاء نتاج تطورات الهندسة التفاضُلية بفضل كُل من جاوس وريمان وكريستوفل. وخُروج علم حُسبان المُمتدات والذي أيضاً يُعرف بعِلم حُسبان التفاضُل المُطلق كجزء مُنظم من علم الرياضيات يرجع إلى ريتشي وطالبه ليفي شفيته اللذان نشرا أول كتاب عن حُسبان المُمتدات وسمياه "طُرق حُسبان التفاضُل المُطلق وتطبيقاته"عام 1901. إن البحث في العلاقات الرياضياتية التي تُصبح صالحة عندما نُغير من نظام إحداثيات لآخر هو الهدف الرئيس لحُسبان المُمتدات. إن قوانين الفيزياء لايُمكن أن تعتمد في شكلها على أُطر الإسناد المرجعية التي يستخدمُها الفيزيائيون لغرض وصف الظواهر الطبيعية لأن الظواهر الطبيعية موجُودة بذاتها بغض النظر عن الإحداثيات المُستخدمة لوصفها. لذلك يُعتبر مرغوباً جمالياً وأيضاً عُرفاً دائماً لإستخدام حُسبان المُمتدات كخلفية رياضياتية لصياغة قوانين الطبيعة. وعلى وجه الخصُوص نذكُر أن أينشتاين وجد أن المُمتدات مُعِدات مُمتازة لتقديم نظريتهُ العامة للنسبية. وكنتاج لذلك برزت أهمية حُسبان المُمتدات والآن أصبح لاغني عنه في تطبيقاته في معظم فروع الفيزياء النظرية كما أنه أيضاً لا غنى عنه في الهندسة التفاضُلية للفضاء الفائق.

من المُفترض أن يكُون لقأري هذا الكتاب معرفة أساسية بحُسبان المُتجهات والمصفُوفات والمُحددات. ولأنه ربما لايكُون مُلماً أو مُطلعاً على حُسبان التغييرات فإن المسألة الدُنيا في نظرية المُنحنيات الأقصر طُولاً تمت مُعالجتها من الأساسيات الأولية.

2§. الفضاء ذو البُعد النوني N

لنعتبر مجمُوعة مُرتبة من N عدد طبيعي من المُتغيرات $x^1, x^2, ..., x^i, ..., x^N$ والتي تأخُذ قيم لأعداد حقيقية. هذه المُتغيرات سوف تُسمى **إحداثيات** نُقطة. (الاعداد $1, 2, ..., i, ..., N$ التي توجد أعلى المُتغيرات تُسمى مُوشر عُلوي وهذه المُوشرات تخدم